Taki Academy

www.takiacademy.com

Magazine

BAC

MATHEMATIQUES

Bac

Sciences de l'informatiques

Nombres complexes

De quoi s'agit-il ?

1. Forme algébrique
2. Ensemble de points
3. Application géométriques
4. Module d'un nombre complexe
5. Conjugué d'un nombre complexe
6. Equation dans $\mathbb{C}$

Année Scolaire 2017/2018

2ème Partie
Nombres complexes

1 : Numéro d'exercice.
1 C : Numéro d'exercice corrigé.
15' : Exercice à faire pendant Le temps indiqué (en minutes).
3 Points : Barème par exercice.

Niveau de difficulté : Facile
Niveau de difficulté : Moyen
Niveau de difficulté : Difficile
Niveau de difficulté : Très Difficile

1 Exercice Principale 2008 — 20' — 4 Points

1°) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2(1+i)z-1+2i=0$.

2°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=i$ et $z_B=2+i$.

a) Calculer les distances OA, OB et AB.

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle.

c) Déterminer l'affixe du point C tel que OABC est un rectangle.

2 Exercice Contrôle 2008 — 25' — 4 Points

1°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-1+i$.

a) Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle.

b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ est un carré.

2°) On considère, dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation (E) : $z^2+ibz-2=0$. où b est un nombre réel.

a) Déterminer b pour que (1 + i) soit une solution de l'équation (E).

b) Pour la valeur de b trouvée, déterminer la deuxième solution de l'équation (E).

3 Exercice Principale 2009 25′ 4,5 Points

1°) a) Calculer $(1-2i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): (1-i)z^2+2z+4i=0$.

On notera par z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $z_2 \in IR$.

2°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.

On désigné par C et D les symétriques respectifs de A et B par rapport au point I d'affixe i.

a) Calculer z_1' et z_2' les affixes respectives de C et D.

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

4 Exercice Principale 2010 10′ 4 Points

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_1=1+3i$ et $z_2=3+i$.

1°) La somme $z_1+\overline{z}_1$ est égale à

a) 2, **b)** -6, **c)** $2+6i$.

2°) La distance AB est égale à

a) 8 **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{2}$

3°) Les solutions, dans c , de l'équation : $z^2-6z+10=0$ sont

a) z_1 et z_2, **b)** z_1 et $\overline{z}_1$, **c)** z_2 et $\overline{z}_2$.

4°) l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z|=\sqrt{10}$ est

a) la droite (AB), **b)** la médiatrice de segment $[AB]$, **c)** un cercle passant par A et B.

5 Exercice Contrôle 2010 20′ 5 Points

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(E): z^2-(1-3i)\,z-(4+3i)=0.$$

1°) a) Calculer $(3+i)^2$.

b) Résoudre l'équation (E).

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2-i$, $-1-2i$ et $1-3i$.

a) Placer les points *A*, *B* et *C* dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

b) Montrer que OACB est un carré.

6 Exercice Principale 2011 25′ 6 Points

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (E) : $z^3+iz^2-2z+4i=0$

1°) a) Vérifier que i est une solution de l'équation (E).

b) En déduire que z est solution de (E) si et seulement si $z=i$ ou $z^2+2iz-4=0$.

2°) a) Résoudre l'équation (E).

b) Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives i, $\sqrt{3}-i$ et $-\sqrt{3}-i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

7 Exercice Contrôle 2011 25′ 5 Points

Le plan complexes est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1°) On désigne par *A*, *B*, *C* et *D* les points d'affixes respectives -1 , i , $1-2i$ et $(1-2i)^2$.

a) Placer les points *A*, *B*, *C* et *D*.

b) Montrer que le triangle *ABC* est rectangle e que le triangle *ACD* est isocèle.

2°) Pour tout nombre complexe z on désigne par *M* et *N* les points d'affixes respectives z et z^2.

a) Montrer que si *ABMN* est un parallélogramme alors $z^2-z+1+i=0$.

b) Montrer que pour une seule valeur de z que l'on déterminera, *ABMN* est un parallélogramme.

8 Exercice Principale 2012 25′ 5 Points

Soit z un nombre complexe quelconque.

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $1+3i$, z^2 et iz.

1°) Montrer que *B* est le milieu du segment $[AC]$ si et seulement si z est solution de l'équation

$$(E):-2z^2+iz+1+3i=0.$$

2°) a) Calculer $(4+3i)^2$.

b) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

3°) On prend $z=-1-\frac{1}{2}i$.

a) Calculer iz.

b) Sans calculer z^2, placer les points *A*, *B* et *C*.

9 Exercice Contrôle 2012 30' 4,5 Points

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^4-2z^3+3z^2-2z+2=0$

1°) a) En remarquant que $z^4-2z^3+3z^2-2z+2=(z^4-2z^3+2z^2)+(z^2-2z+2)$, montrer que l'équation (E) est équivalente à $(z^2+1)(z^2-2z+2)=0$.

b) Résoudre l'équation (E).

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par *A*, *B*, *C* et *D* les points d'affixes respectives i, –i, 1–i et 1+i

a) Placer les points *A*, *B*, *C* et *D*

b) Montrer que le quadrilatère *ABCD* est un rectangle.

10 Exercice Principale 2013 30' 5 Points

1°) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$z^2-2(2-i)+7-4i=0.$$

2°) Soit $P(z)=z^3-(2-3i)z^2-(3+4i)z+18-i$ où $z\in\mathbb{C}$.

a) Vérifier que $P(z)=(z+2+i)(z^2-2(2-i)z+7-4i)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.

3°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives 2 + i ; −1 − 3i ; −2 − i et 2 − 3i.

a) Placer les points *A*, *B*, *C* et *D*.

b) Montrer que le triangle *ABC* est rectangle.

c) Montrer que les points *A*, *B*, *C* et *D* sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

11 Exercice Principale 2014 30' 5 Points

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1°) a) Vérifier que $(1-5i)^2=-24-10i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2+(3-i)z+8+i=0$.

2°) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-2+3i$, $z_B=-1-2i$ et $z_C=4-i$.

a) Placer dans le plan les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

c) Déterminer l'affixe du point D pour lequel ABCD est un carré.

3°) soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1-i|=\sqrt{13}$.

a) Déterminer l'ensemble (Γ).

b) Que représente l'ensemble (Γ) pour le carré ABCD ? Construire (Γ).

12 Exercice Principale 2015 30' 5 Points

1°) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)+4(-2+i)=0$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^2=(2+i)^2$.

b) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$.

$$z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)+4(-2+i)=(z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right].$$

c) Résoudre alors l'équation (E).

2°) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i$, $1+i$ et $-3+i$.

a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Déterminer son centre I et son rayon r.

b) Montrer que $A\in\mathscr{C}$.

c) Donner la nature du triangle ABC. Justifier votre réponse.

d) Placer les points A, B et C et construire le cercle $\mathscr{C}$.

13 Exercice Principale 2016 30′ 5 Points

On considère, dans $\mathbb{C}$, les deux équations suivantes :

(E_1) : $z^2-(1+5i)z-8+i=0$

et (E_2) : $z^3-(1+6i)z^2+(-13+2i)+1+8i=0$.

1°) a) vérifier que $(3+i)^2=8+6i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1).

2°) a) Déterminer les nombres complexes b et c tels que :

$z^3-(1+6i)z^2+(-13+2i)z+1+8i=(z-i)(z^2+bz+c)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_2).

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points d'affixes respectives : $z_A=i$, $z_B=2+3i$ et $z_C=-1+2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que ABC est un triangle rectangle.

14 Exercice Principale 2017 25′ 4 Points

1°) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-2(1+i)z+3-2i=0$.

a) Vérifier que $(1+2i)^2=-3+4i$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2°) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=-i$, $z_B=3$, $z_C=2+3i$ et $z_D=-1+2i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Calculer $|z_C-z_A|$ et $|z_D-z_B|$.

c) Calculer $(z_C-z_A)(\overline{z_D-z_B})$.

d) Déduire que $ABCD$ est un carré et calculer son aire.

Taki Academy

www.takiacademy.com

Vos réactions et commentaires sont toujours les bienvenus. N'hésitez pas à m'envoyer vos CRITIQUES, vos REMARQUES et vos SUGGESTIONS.

MATHEMATIQUES